

EXERCICE 1

Résoudre rapidement, grâce à Maple, l'équation $xy' - y = x^2$ d'inconnue $y \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

EXERCICE 2

Les notations sont celles du cours sur la méthode d'Euler.

- 1) Ecrire une procédure **metheuler** prenant pour argument F , x_0 , y_0 , L et n , et renvoyant le graphe obtenu en reliant linéairement les points (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , $\dots$, (x_n, y_n) .

Attention! Quand vous testerez votre procédure **metheuler** sur des exemples, prenez bien soin de demander à maple uniquement d'effectuer du calcul sur des **flottants**. Sans cela Maple effectuera par défaut du calcul exact, et les calculs seront si compliqués qu'il finira par bugger.

- 2) Tout problème de primitivation consiste à résoudre une équation différentielle. La méthode d'Euler est donc utile aussi quand on veut approximer une primitive. Tracer sur un même graphe, sur $[0, 10]$, la primitive de $x \mapsto \sin(x^2)$ qui s'annule en 0 et son approximation par la méthode d'Euler pour $n = 10$ et $n = 100$.

EXERCICE 3

On se propose ici de généraliser la méthode d'Euler au cas des équations différentielles du second ordre $y''(x) = F(x, y(x), y'(x))$ avec deux conditions initiales $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y'_0$. On admettra que pour tout x et pour ε petit :

$$y(x+\varepsilon) \approx y(x) + \varepsilon y'(x) + \frac{\varepsilon^2}{2} y''(x) \quad \text{donc} \quad y(x+\varepsilon) \approx y(x) + \varepsilon y'(x) + \frac{\varepsilon^2}{2} F(x, y(x), y'(x))$$

$$\text{et} \quad y'(x+\varepsilon) \approx y'(x) + \varepsilon y''(x) \quad \text{donc} \quad y'(x+\varepsilon) \approx y'(x) + \varepsilon F(x, y(x), y'(x)).$$

On définit ici deux suites au lieu d'une : $(y_0, y_1, \dots, y_n)$ et $(y'_0, y'_1, \dots, y'_n)$, approximations de y et y' respectivement. Plus précisément, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$:

$$y'_{k+1} = y'_k + \varepsilon F(x_k, y_k, y'_k) \quad \text{et} \quad y_{k+1} = y_k + \varepsilon y'_k + \frac{\varepsilon^2}{2} F(x_k, y_k, y'_k).$$

- 1) Ecrire une procédure **metheuler2** prenant pour argument F , x_0 , y_0 , y'_0 , L et n , et renvoyant le graphe obtenu en reliant linéairement les points (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , $\dots$, (x_n, y_n) .
- 2) On s'intéresse aux oscillations planes d'un pendule simple. Si tout frottement est négligé et si θ désigne l'angle de la tige par rapport à sa position au repos verticale, θ est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\theta'' = -\alpha \sin \theta, \quad \text{pour un certain } \alpha > 0.$$

Dans les applications numériques qui suivent, on choisira $\alpha = 1$ et $x_0 = y_0 = 0$. A quoi ressemblent les oscillations du pendule pour y'_0 compris entre 0 et 2 ? Et pour y'_0 strictement supérieur à 2 ? Interpréter ces résultats.